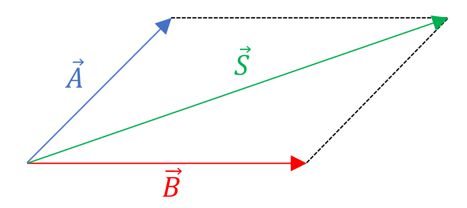
Rappels d'algèbre vectorielle pour la mécanique du point

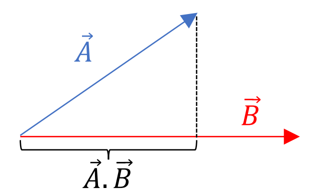
$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sont trois vecteurs de l'espace géométrique repéré et orienté par le trièdre orthonormé direct (O, x, y, z) de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$.
λ est un scalaire.

1) Somme vectorielle



$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} \qquad avec\ en\ projection\ sur\ les\ trois\ axes\ du\ repère : \qquad S_i = A_i + B_i \quad avec\ i = x, y, z$$

2) Produit scalaire



Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire :

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = \vec{B}\,.\,\vec{A} = \|\vec{A}\|\,.\,\|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = \|\vec{A}\|\ proj_{\vec{A}}(\vec{B}) = \|\vec{B}\|\ proj_{\vec{B}}(\vec{A})$$

$$\lambda(\vec{A}\,.\,\vec{B}) = (\lambda\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}\,.\,(\lambda\vec{B}) \quad ; \quad (\vec{A} + \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}\,.\,\vec{C} + \vec{B}\,.\,\vec{C}$$

Caractérisation : $\vec{A}\,.\,\vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} = 0 \quad ou \quad \vec{B} = 0 \quad ou \quad \vec{A} \perp \vec{B}$

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Le résultat du produit scalaire est un nombre.

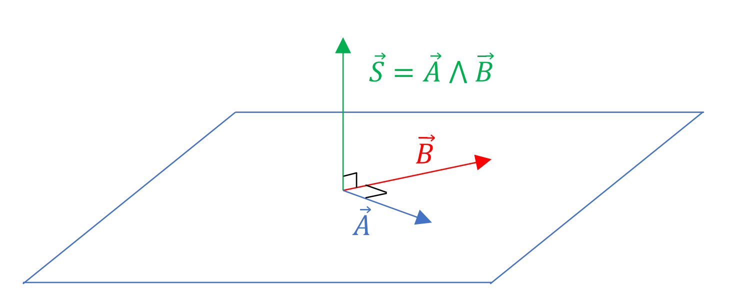
Application : $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A\,B}$ où A et B désignent les normes $\|\vec{A}\|$ et $\|\vec{B}\|$ de $\vec{A}$ et $\vec{B}$

3) Le produit vectoriel

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est noté $\vec{A} \wedge \vec{B}$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{V}$:

- Est orthogonal à $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- A un sens tel que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{V})$ est direct
- A pour norme $\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| \sin(\vec{A}, \vec{B})$



Le produit vectoriel est antisymétrique : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

Le produit vectoriel est bilinéaire : $(\lambda\vec{A} + \vec{B}) \wedge \vec{C} = \lambda(\vec{A} \wedge \vec{C}) + (\vec{B} \wedge \vec{C})$

Caractérisation :

$\vec{A} \wedge \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} = \vec{0} \quad ou \quad \vec{B} = \vec{0} \quad ou \quad \vec{A} // \vec{B} = \vec{0} \quad (ou\ encore\ \vec{A} = \lambda \vec{B})$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ -(A_x B_z - A_z B_x) \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

Le résultat du produit vectoriel est un vecteur.

4) Produit mixte :

$\rightarrow \vec{A} . (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) . \vec{C}$

$\rightarrow \vec{A} . (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}\ ou\ \vec{B}\ ou\ \vec{C} = \vec{0}\ \ ou\ bien\ \ \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\ coplanaires$

5) Double produit vectoriel :

$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$

$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$